Surjectivité de l'exponentielle matricielle (150, 155, 204, 214)

Zavidovique p. 53-55.

thm : L'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

demo : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

Étape 1 : $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

On a $\mathbb{C}[A]^\times \subseteq \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

car M est un polynôme en A.

Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$. Donc $M \in \mathbb{C}[A]^\times$.

Étape 2 : L'exponentielle réalise un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^\times, \times)$

L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$ donc $\forall M, N \in \mathbb{C}[A]$ on a

$$e^{M+N} = e^M e^N \quad \text{puisque } MN = NM.$$

Soit $M \in \mathbb{C}[A]$, comme $e^M \in \mathbb{C}[A]$ et $e^M \in GL_n(\mathbb{C})$, on a que $e^M \in \mathbb{C}[A]^\times$ par l'étape 1.

D'où le résultat.

Étape 3 : $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[A]$.

* ouvert : intersection d'ouvert de $\mathbb{C}[A]$ par l'étape 1.

* connexe : Montrons qu'il est connexe par arcs.

Soit M et $N \in \mathbb{C}[A]^\times$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = \det(zN + (1-z)M)$.

On remarque que P est un polynôme de degré n en z, qui ne s'annule ni en 0 ni en 1, donc il est non nul.

On pose $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin continue de 0 à 1 qui ne passe par aucune racine de P.

Alors le chemin $\Gamma : [0,1] \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, $t \longmapsto \gamma(t)N + (1-\gamma(t))M$ est continue et il relie M à N.

De plus $\Gamma(t) \in \mathbb{C}[A]^\times$ $\forall t \in [0,1]$, par construction de γ.

Étape 4 : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.

On a $d\exp(O_n) = \mathrm{Id}_n$ donc $\det(d\exp(O_n)) = 1 \neq 0$. De plus l'exponentielle est une application de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$). On peut donc appliquer le thm d'inversion locale en O_n.

Il existe $U \subset \mathbb{C}[A]$ un voisinage ouvert de O_n et $V \subset \mathbb{C}[A]$ un voisinage ouvert de I_n tels que $\exp : U \longrightarrow V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En particulier, $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient un voisinage de I_n.

Soit $e^{M} \in \exp(\mathbb{C}[A])$. On a $e^{M+U} = e^{M} e^{U} = e^{M} V$ par l'étape 2.

Or comme e^{M} est inversible, la multiplication à gauche par e^{M} est un homéomorphisme de $\exp(\mathbb{C}[A])$ sur lui-même. Cet homéomorphisme envoie V sur $e^{M} V = e^{M+U}$, qui est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ contenant e^{M} et inclus dans $\exp(\mathbb{C}[A])$.

Ainsi $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de chacun de ses points, donc c'est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

Étape 5 : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]^{\times}$.

On a $\exp(\mathbb{C}[A])$ qui est un sous-groupe de $\mathbb{C}[A]^{\times}$, par l'étape 2, donc $\mathbb{C}[A]^{\times} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ peut s'écrire comme réunion des classes à gauche non triviales modulo $\exp(\mathbb{C}[A])$.

$$\mathbb{C}[A]^{\times} \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^{\times} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$$

Or $M \exp(\mathbb{C}[A])$ sont des ouverts (image d'ouverts par un homéomorphisme) donc $\mathbb{C}[A]^{\times} \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert.

Ainsi $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]^{\times}$ (son complémentaire est un ouvert).

Étape 6 : Pour $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, alors par l'étape 1, on a $A \in \mathbb{C}[A]^{\times}$.

Or d'après les étapes 4 et 5, $\exp \mathbb{C}[A]$ est un ouvert fermé (non vide) du connexe $\mathbb{C}[A]^{\times}$ donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^{\times}$.

D'où $A \in \mathbb{C}[A]^{\times} = \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp(M_n(\mathbb{C}))$, autrement dit $Gl_n(\mathbb{C}) \subset \exp(M_n(\mathbb{C}))$

D'où le résultat.

Questions : Surjectivité de l'exponentielle matricielle

• $\exp(A) \subset \mathbb{C}[A]$?

$\mathbb{C}[A]$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc il est fermé.

Ainsi $\exp(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ est dans $\mathbb{C}[A]$ comme limite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$.

• $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$?

Soit $\chi_M(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ son polynôme caractéristique.

Comme $M \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_M(0) = a_0 = \det(M) \neq 0$ donc par le thm de Cayley-Hamilton on a

$$0 = \chi_M(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \quad \text{donc} \quad -a_0 I_n = \sum_{k=1}^{n} a_k M^k = M\left(\sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1}\right)$$

$$\text{D'où } M^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k M^{k-1} \in \mathbb{C}[M].$$

• $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue tel que $\gamma(0)=0$ et $\gamma(1)=1$ et qui ne passe pas par les racines de P ?

P ne s'annule qu'en un nombre fini de points et $\gamma(t) \in \mathbb{C}$ donc on peut facilement éviter les racines de P pour γ : ($\mathbb{C} \setminus \{\text{nb finis de points}\}$ est connexe)

• $\Gamma(t) \in \mathbb{C}[A]^\times \ \forall t \in [0,1]$?

Comme γ évite les zéros de P, on a $\forall t \in [0,1]$, $\det(\Gamma(t)) = \underbrace{\det(\gamma(t) N + (1-\gamma(t)) M)}_{P(\gamma(t))} \neq 0$.

De plus $\Gamma(t) \in \mathbb{C}[A] \ \forall t \in [0,1]$.

Ainsi $\forall t \in [0,1]$, $\Gamma(t) \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$ par l'étape 1.